

# Das magische Sechseck

**Wie die Natur für Stabilität sorgt: Nicht nur Bienen können Sechsecke bauen. Auch Schaumblasen ordnen sich oft zu einem Muster, das wie eine Bienenwabe aussieht: Kreise und Sechsecke haben eine innere Verwandtschaft, wenn sie in Massen auftreten. Doch auch bei anderen Gelegenheiten erweist sich das Sechseck als etwas Besonderes – es ist die Lieblingsfigur der Natur.**

Die erste Wand ist fertig – schnurgeradeaus. Nun kommt die Ecke zur zweiten Wand. Der Winkel zwischen beiden soll genau 120 Grad betragen. Kein Problem, auch ohne Winkelmesser oder sonstige Meßgeräte ist die Genauigkeit groß genug, daß die letzte, die sechste Wand das Haus zum perfekten Sechseck schließt.

Baumeister ist die Biene. Aus Wachs formt sie mit Mund und Füßen die Wände ihrer Waben. Woher eigentlich hat sie diese architektonischen Kenntnisse?

Woher weiß sie schon zu Beginn ihres Bauens, daß schnurgerade Wände – und nicht etwa runde – und daß nur 120-Grad-Winkel die Grundelemente für ihre Honigvorratskammern und für die vielen Geburtsstuben der Bienenkinder sind?

„Sie kann das eben“, sagt Dr. Peter Rosenkranz, Leiter der Landesanstalt für Bienenkunde an der Universität Hohenheim, lakonisch. „Wie die Biene das macht, so exakte Sechsecke zu bauen, ist eine Frage, die niemand beantworten kann. Das ‚Warum‘ ist in der Biologie sowieso eine schwierige Frage, sie verführt immer dazu, an ein Ziel der Evolution zu glauben. Es dreht sich jedoch lediglich um eine Optimierung im Laufe der Evolution.“

Die Natur benutzt verschiedene Prinzipien, um ihren Formen Stabilität zu geben. Eine bewährte Form für Flächen und flächenhafte Gebilde – allgemein: wenn eine große Fläche durch kleine Einheiten strukturiert wird – ist das regelmäßige Sechseck.

Eines der sechseckigen Wunderwerke der Natur ist neben der Bienenwabe die Schneeflocke. Johannes Kepler ist vermutlich der erste, der diese feinen Strukturen beschrieb. In seiner Schrift „Vom sechseckigen Schnee“ von 1611 macht er sich Gedanken, warum die Flocken ausgerechnet sechs Strahlen haben: „Wer hat das Kernchen, bevor es zu fallen anfing, mit sechs Eishörnchen versehen?“

Seine Frage klingt modern, fast so, als ob er schon etwas über Keimwirkung gewußt hätte. „Da also eine äußere Ursache, nämlich die Kälte, dies nicht bewirken kann, muß es eine innere sein und zwar eine, die mit dem Wasserdampfe zusammenhängt. Während ich dies erwäge, wundere ich mich, warum die Strahlen nicht lieber auf der ganzen Oberfläche einer Kugel angeordnet sind.“

Der Grund für den sechseckigen Schnee liegt tatsächlich in der Struktur des Wassers. Die zwei Wasserstoff-Ionen zu beiden Seiten des Sauerstoff-Ions bilden im Wassermolekül H<sub>2</sub>O keine Gerade, sondern schließen einen Winkel von 120 Grad ein. Wasser kann zehn verschiedene Kristallstrukturen bilden, jedoch nur eine von ihnen ist bei gewöhnlichem Druck und mäßig tiefen Temperaturen stabil: die hexagonale. Das heißt: Es bildet sich Eis mit sechszähliger innerer Symmetrie.

Wenn ein Eiskristall unter idealen Bedingungen wächst, also mit so großer räumlicher Freiheit wie eine fallende Schneeflocke, spiegelt sich in seiner äußeren Gestalt die sechszählige Symmetrie der Molekülstruktur:

Alle Flocken haben sechs Strahlen, und der Winkel zwischen den vorherrschenden Kristalloberflächen ist immer gleich groß, wie man es an jeder Schneeflocke nachmessen kann: exakt 60 Grad.

Für viele weitere sechseckige Erscheinungen in der Natur ist die Erklärung nicht so plausibel wie die für die Schneesterne.

Den Sechseck-Winkel 120 Grad bevorzugen zum Beispiel einige Pflanzen bei der Verzweigung am Ende von Triebblängen. An der Südküste von Kreta etwa trifft man häufig auf stachelige, halbkugelförmige Polster, die bis zu einem halben Meter groß werden. Einheimische nennen sie Astivida, der wissenschaftliche Name ist *Euphorbia acanthothamnus*.

Auf den ersten Blick scheinen die feinen Ästchen viele Sechsecke zu bilden. Bei genauerem Hinsehen jedoch findet man, daß die reich verzweigten dornigen Astenden an vielen Stellen geschlossene regelmäßige Sechsecke nur vortäuschen. Sie wären tatsächlich geschlossen, wenn die Verzweigungen jeweils in der gleichen Ebene lägen.

Was ist eigentlich das Besondere am Sechseck gegenüber anderen regelmäßigen Flächen? Eine herausragende Eigenschaft lernt der Mensch schon im Geometrie-Unterricht in der Schule kennen: Wandert man mit einem Zirkel, mit dem man gerade einen Kreis geschlagen hat, einmal über den Kreisumfang, dann kommt man nach sechs Schritten wieder genau am Anfang an.

Wer das zum ersten Mal macht, könnte auf den ersten Blick meinen, die Größe des Kreis-Umfangs als das Sechsfache des Radius gefunden zu haben. Auf den zweiten Blick jedoch merkt er, daß der Zirkel bei jedem Schritt eine Abkürzung macht: geradeaus statt am Kreisbogen entlang. In dieser Differenz steckt die Zahl  $\pi$ . Das Sechsfache des Radius ist nach der Zirkelwanderung der Umfang eines Sechsecks. Der wirkliche Kreisumfang ist etwas größer, das 2,214-fache des Radius. Bei der Konstruktion des Sechsecks mit dem Zirkel rührt man an die Wurzeln der sphärischen Geometrie.

Ein ballähnlicher Körper aus regelmäßigen Sechsecken ist jedoch nicht möglich. Legt man gleichgroße Sechsecke aneinander, erhält man stets eine geschlossene Fläche, wie man sie häufig als Parkett, Bürgersteige oder gekachelte Fußböden und Wände findet.

Körperhafte Gebilde aus gleichen regelmäßigen Flächen lassen sich nur mit Dreiecken, Quadraten und Fünfecken herstellen: die sogenannten Platonischen Körper, benannt nach dem griechischen Philosophen: Plato hatte als erster erkannt, daß es genau fünf dieser Körper geben kann. Johannes Kepler hat rund 2000 Jahre später auf diesen fünf Körpern sein Gebäude der Welt konstruiert, indem er sie zwischen die Bahnen der sechs Planeten zwängte. Damit glaubte er, das „Weltgeheimnis“ gelöst zu haben, denn nun wußte er, warum es gerade sechs Planeten gab, die genau in diesen Abständen um die Sonne liefen und nicht in irgendwelchen beliebigen (bild der wissenschaft 7/1996, „Keplers kosmisches Geheimnis“).

Eine Abart eines dieser fünf Platonischen Körper machte vor wenigen Jahren Furore: das Fulleren, ein Molekül aus 60 Kohlenstoffatomen. Seine Struktur entspricht dem aus 20 Dreiecken zusammengesetzten Ikosaeder, dem man die Ecken abgeschnitten hat. Die dadurch entstehenden Löcher sind Fünfecke, die gestutzten Dreiecke wurden zu Sechsecken. Die Struktur ist exakt die gleiche wie bei einem Fußball: eine Kugel aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken.

Ein Ableger dieser Kohlenstoffbälle sind die sogenannten Nanotubes, Röhren, deren Wände aus reinen Sechseck-Netzen bestehen. Sie können in verschiedenen Größen auftreten, wobei sogar mehrere Röhren ineinandergeschachtelt sind. Die Erforschung dieser ganz neuen Gebilde läuft auf vollen Touren.

Die Fullerene haben ein neues Tor der Chemie aufgestoßen, ein noch unerschlossenes Feld neuartiger Verbindungen. Es war ein Aufbruch, ähnlich dem vor 140 Jahren, als August Kekulé die Struktur von Benzol fand: einen geschlossenen Ring aus sechs Kohlenstoff-Atomen. Benzol wurde zum Schlüssel für ein weites Neuland, dem Reich der aromatischen Chemie.

Warum spielt das Sechseck in der Natur eine so wichtige Rolle? Es zeichnet sich durch besondere Stabilität aus – eine durchaus erstrebenswerte Eigenschaft, wenn es um die Konstruktion ebener Flächen geht. So bestehen zum Beispiel die einzelnen Kristallflächen des Diamanten aus regelmäßigen Kohlenstoff-Sechsecken – ein Grund für seine große Härte. Will man eine Ebene dicht mit regelmäßigen Flächen belegen, zum Beispiel mit Kacheln, könnte man dazu zwar auch Dreiecke oder Quadrate nehmen. Doch Sechsecke haben die stumpfsten Ecken, sie kommen dem Kreis am nächsten. Das hat Vorteile: Herausragende Ecken sind immer bruchgefährdet.

Das gilt zum Beispiel auch für die Konstrukteure von Spiegelteleskopen: Der zehn Meter große Spiegel des Keck-Teleskops auf dem hawaiianischen Berg Mauna Kea wurde aus 36 sechseckigen Einzelspiegeln zusammengesetzt. Kanten sind für Spiegel – wie auch für natürliche Gebilde – immer eine kritische Stelle. Sie werden deshalb möglichst klein gehalten, das heißt möglichst kreisförmig.

Bei Spiegeln ist die Oberflächengenauigkeit bei einem runden Block wesentlich problemloser als auf den Ecken etwa eines Quadrats oder eines Dreiecks, ganz zu schweigen von den Schwierigkeiten beim Schleifen. Die Länge des Umfangs aber steigt bei konstanter Fläche mit abnehmender Eckenzahl: Ein Kreis mit 1 Zentimeter Radius hat den Umfang  $2\pi = 6,3$  Zentimeter. Ein regelmäßiges Sechseck gleicher Fläche hat mit 6,6 Zentimeter einen etwas größeren Umfang. Beim Quadrat gleicher Fläche steigt er auf 7,1 und beim gleichseitigen Dreieck auf 11,4 Zentimeter an. Kein Wunder, daß es kein Teleskop mit dreieckigen Spiegeln gibt.

Auch die Natur versucht, Flächen möglichst kreisförmig und Räume möglichst kugelig zu gestalten. Es ist deshalb nicht zufällig, daß zum Beispiel Fettaggen auf der Suppe Kreise und freischwebende Wassertropfen Kugeln sind – ebenso wie die Planeten und Sonnen.

Bei Fettaggen und Wassertropfen ist die Oberflächenspannung dafür verantwortlich. Stellt man sie sich wie eine Gummihaut vor, die um ein bestimmtes Volumen gespannt wird, dann drückt sie den Inhalt auf die Form mit der kleinsten Oberfläche. Das ist die Kugel.

Ganz ähnlich ist es in der Fläche, beim Kreis. Mit Kreisen aber läßt sich eine beliebige Fläche leider nicht vollständig bedecken, man muß zur „zweiten Wahl“ greifen, den Vielecken. Von allen regelmäßigen Vielecken, die eine Fläche bedecken, ist das Sechseck das kreisähnlichste.

Wer mit wachen Augen die Welt betrachtet, findet noch viele Beispiele dafür, daß das Sechseck eine Lieblingsfigur der Natur ist. In vulkanischen Gebieten etwa, besonders schön auf Island, findet man bündelweise Basaltsäulen mit sechseckigem Querschnitt. Der grünlich-schwarze Basalt ist das verbreitetste vulkanische Gestein. Wenn es im Schlot erstarrt, zerspringt es in sechseckige Säulen – zuweilen sind auch fünfeckige dazwischen. Das ist energetisch günstiger als etwa Dreiecks- oder Vierecks-Säulen. Pro Flächeneinheit wären dazu mehr Risse nötig, was viel mehr Energie kosten würde.

Doch man muß nicht bis Island reisen – es reicht, eine Fliege im Wohnzimmer zu fangen und ihr Auge mit einer starken Lupe oder unter dem Mikroskop zu betrachten: Über 1000 Sechsecke sieht man da. Den Rekord hält die Libelle: Ihre Facettenaugen bestehen aus 28000 Sechsecken – jedes einzelne ein vollständiges Auge.

Wolfram Knapp